7. Testes de Hipóteses

Suponha que você é o encarregado de regular o engarrafamento automatizado de leite numa determinada agroindústria. Sabe-se que as máquinas foram reguladas para engarrafar em média 1,0 litro de leite, com desvio padrão de 0,004 litro. Entretanto, um monitoramento do processo deve ser feito, retirando-se para tal, uma amostra de 10 garrafas. Como estabelecer um critério para saber se as máquinas precisam ou não de regulagem? A resposta seria um ***teste de hipóteses*** *que permita afirmar se as garrafas estão ou não estão realmente saindo com média de 1,0 litro de leite.*

7.1. Introdução

As duas principais áreas da inferência estatística são: estimação de parâmetros e testes de significância ou testes de hipóteses.

Feita uma determinada afirmação sobre uma população, usualmente sobre um parâmetro desta, deseja-se saber se a amostra em estudo fornece evidências que contrariam ou não tal afirmação. Assim, o objetivo de um teste de hipótese é fornecer ferramentas que permitam validar ou rejeitar uma hipótese através dos resultados da amostra.

Definição: Em estatística uma hipótese é uma suposição quanto ao valor de um parâmetro populacional ou, uma afirmação quanto à natureza da população.

Exemplos:

1. A média populacional da produtividade de alho é 10 $t.ha^{-1}$, isto é, $\mu = 10,0$;
2. A proporção de plantas de cana-de-açúcar infestadas com a broca gigante no Brasil é 5%, ou seja, $p = 0,05$;
3. A distribuição do peso médio de frutos de pimenta *Capsicum* spp. é normal;

7.2. Teste de Hipótese

É uma regra ou procedimento de decisão para não rejeitar ou rejeitar uma hipótese estatística com base em informações da amostra.

7.2.1. As Hipóteses

- Hipótese de Nulidade (H_0): é a hipótese a ser testada, ou seja, é uma afirmação de igualdade sobre o parâmetro de interesse.

Se for testado, por exemplo, a igualdade entre duas médias, pode-se ter: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

- Hipótese Alternativa (H_1 ou H_a): é a hipótese que contraria H_0, visto que, é a afirmação de que o valor do parâmetro difere de alguma forma do valor especificado na hipótese nula.

Para o caso das duas médias anteriores, tem-se:

$H_{a1} : \mu_1 \neq \mu_2$

$H_{a2} : \mu_1 < \mu_2$

$H_{a3} : \mu_1 > \mu_2$

Neste caso H_{a1}, H_{a2} e H_{a3}, caracterizam testes bilateral, unilateral à esquerda e unilateral à direita, respectivamente.

Qual delas usar?

A resposta correta depende do conhecimento que se tem do problema ou das informações que o problema traz. A alternativa mais geral é a bilateral.

7.2.2. Estatística de Teste

Valor obtido por meio da conversão da estatística amostral em um valor, com a suposição de que a hipótese nula (H_0) é verdadeira.

Exemplos de Estatística de Teste para uma média:

i. Variância populacional conhecida (σ^2),

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

ii. Variância populacional desconhecida (σ^2),

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}.$$

7.2.3. Região Crítica (RC)

A região crítica para um teste de hipótese é dada pelo conjunto de valores da estatística de teste que nos levam à rejeição de H_0.

Todo teste estatístico é construído sob a suposição de que H_0 é verdadeira. As Figuras 7.1, 7.2 e 7.3 ilustram as regiões critica para os testes Z bilateral, unilateral à direita e a esquerda, respectivamente.

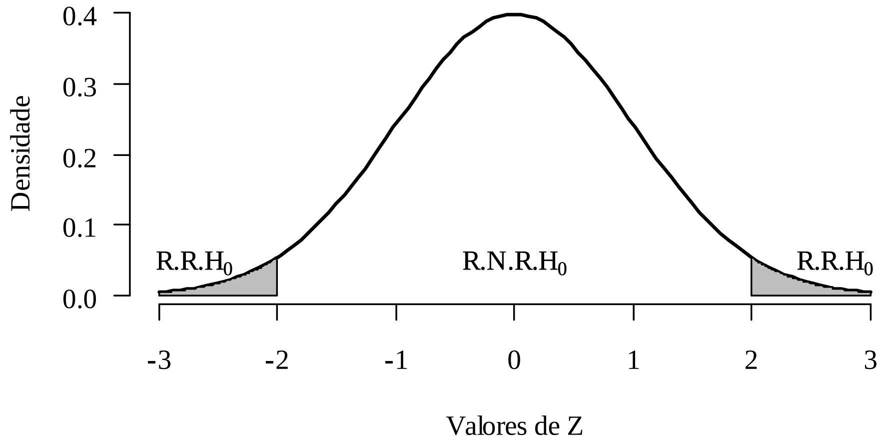


Figura 7.1. Distribuição normal padrão e regiões críticas (ou regiões de rejeição de H_0, R.R.H_0) de significâncias para um teste bilateral.

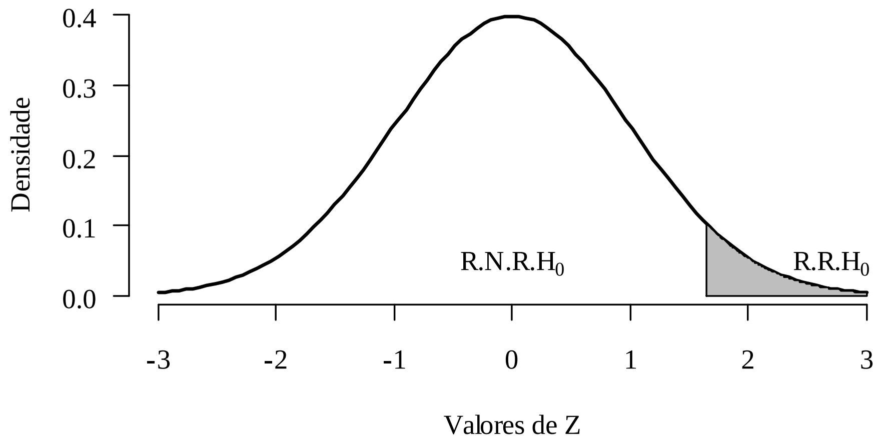


Figura 7.2. Distribuição normal e região crítica de significância para um teste unilateral à direita.

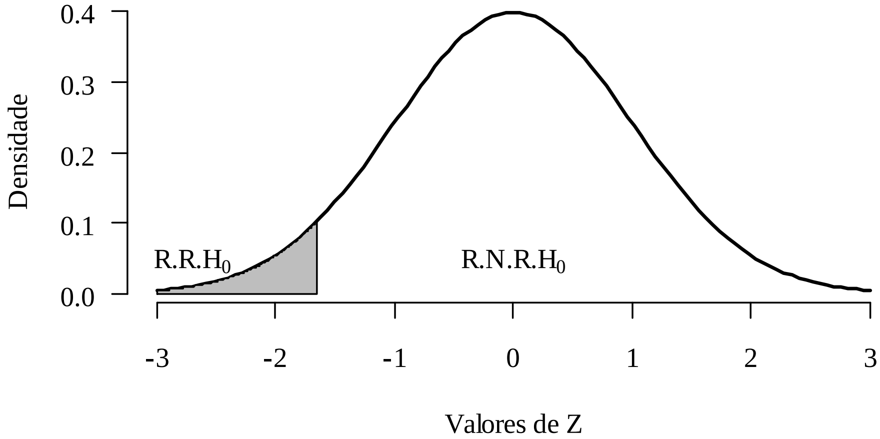


Figura 7.3. Distribuição normal e região crítica de significância para um teste unilateral à esquerda.

Caso o valor observado da estatística do teste $(\text{Z, t}, \chi^2, \text{F}, etc)$, pertença à região crítica, rejeita-se H_0, caso contrário, não rejeita-se a hipótese de nulidade.

Qualquer que seja a decisão tomada em relação às hipóteses formuladas, existe a probabilidade de incorrer em erros. A seguir são definidos os dois tipos de erros denominados de erro tipo I e II.

7.2.4. Erro Tipo I

O erro tipo I é caracterizado pelo fato de rejeitar H_0 quando esta é verdadeira. Sua probabilidade é representada por α e é denominada nível de significância do teste.

$\alpha = \text{P}$(erro tipo I) = P (rejeitar H_0 | H_0 verdadeira)

7.2.5. Erro Tipo II

O erro tipo II é caracterizado pelo fato de não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa. A probabilidade de cometer este erro é indicada por β.

β = P (erro tipo II) = P(não rejeitar H_0 | H_0 falsa)

7.2.6. Poder do Teste

É a probabilidade de rejeitar H_o quando esta é falsa: Poder = $1-\beta$.

A Tabela 7.1 resume as possíveis situações descritas anteriormente.

Tabela 7.1. Possibilidades de se cometer os erros tipo I e II

Decisão	Realidade	
	H_0 é verdadeira	H_0 é falsa
Rejeitar H_0	α (Erro tipo I)	$1-\beta$ (Poder do teste)
Não Rejeitar H_0	$1-\alpha$ (Nível de confiança)	β (Erro tipo II)

7.2.7. Passos para Construção de um Teste de Hipóteses

De acordo com os ingredientes básicos apresentados anteriormente, o procedimento para realização de um teste de hipóteses pode ser sintetizado nos seguintes passos:

1. Enunciar as hipóteses H_0 e H_a;
2. Fixar o limite de erro α e identificar a variável do teste;
3. Determinar a estatística de teste apropriada e sua distribuição amostral (normal, t, qui-quadrado, F, ...);
4. Determinar as regiões de rejeição em função do nível de significância α, por meio de tabelas estatísticas;
5. Com os dados amostrais, avaliar o valor da estatística do teste;
6. Concluir pela rejeição ou não rejeição de H_0 pela comparação do valor obtido no 5º passo com a região de rejeição determinada no 4º passo.

7.3. Testes para uma média

7.3.1. Teste Z

Suponha que *X* é uma variável com distribuição normal com média μ e variância σ^2, sendo esta última conhecida. A partir de dados de uma amostra de tamanho *n*, poderemos então usar a média amostral $\overline{X}$ para avaliar hipóteses H_0 de interesse a respeito de μ, utilizando para tal a estatística de teste:

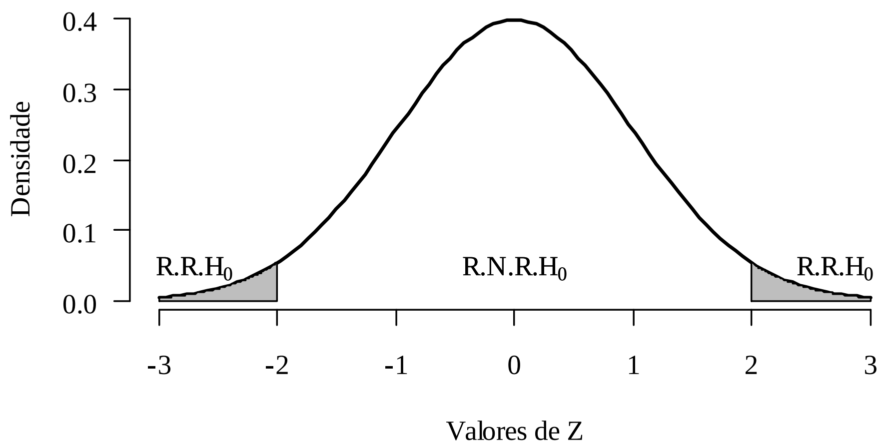
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

que tem distribuição normal padrão, isto é, $Z \sim N(0, 1)$.

Exemplo: revisitemos o exemplo de introdução, sobre o engarrafamento de leite numa agroindústria. Admita agora que com base em $n = 10$ garrafas, obteve-se a média amostral $\overline{X} = 0{,}996$ litro. O problema poderia ser resolvido avaliando-se as seguintes hipóteses:

$$H_0\!: \mu = 1{,}0 \qquad vs. \qquad H_1\!: \mu \neq 1{,}0$$

Definamos agora um nível de significância $\alpha = 5\%$. Usaremos o teste Z, já que a verdadeira (populacional) variância σ^2 é conhecida. Perceba que o teste é bilateral, pois $H_1\!: \mu \neq 1{,}0$. Assim, temos duas regiões de rejeição de H_0, que correspondem a 2,5% em cada cauda da curva. Os valores na tabela da normal padrão que delimitam as $R.R.H_0$ são: z = -1,96 e z = 1,96.



O valor estatística de teste é:

$$Z = \frac{0{,}996 - 1{,}0}{0{,}004 / \sqrt{10}} = -3{,}16$$

Agora observe que o valor da estatística de teste (Z = -3,16) encontra-se na primeira região de rejeição. Logo, devemos rejeitar H_0 e concluir que o volume médio engarrafado é diferente de 1,0 litro, sendo necessária nova regulagem das máquinas.

7.3.2. Teste t

Se a variável aleatória X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2, mas sendo esta última desconhecida, podemos substituí-la pela sua estimativa, a variância amostral s^2. Neste caso, a estatística de teste para a média μ é

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

Esta quantidade não mais distribuição normal padrão (Z), mas sim uma *distribuição t-Student*, cujos valores são tabelados em função do número de graus de liberdade da amostra (*n - 1*) e do nível de significância do teste (α).

Exemplo: ainda continuando com o exemplo da engarrafadora de leite, admita que a seguinte amostra de tamanho n = 10 foi obtida:

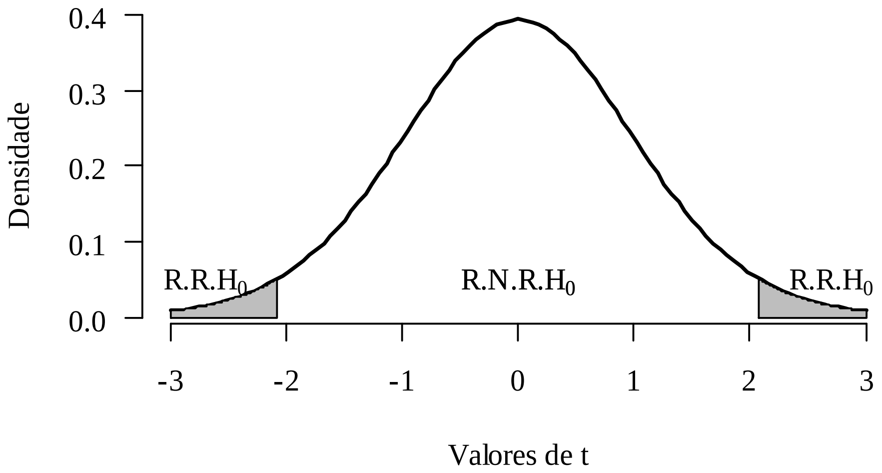
```
1,003 0,995 0,991 0,991 0,998 0,987 0,997 0,994 1,000 1,003
```

cuja média amostral é $\overline{X} = 0{,}996$ e o desvio padrão amostral é $s = 0{,}0053$.

As hipóteses à serem formuladas são as mesmas do teste Z, isto é:

$$H_0: \mu = 1{,}0 \quad vs. \quad H_1: \mu \neq 1{,}0$$

Definamos agora um nível de significância $\alpha = 5\%$. Usaremos o teste t, já que a verdadeira variância σ^2 é desconhecida. Perceba que o teste também é bilateral, pois $H_1: \mu \neq 1{,}0$. O formato da curva da distribuição t é muito semelhante a curva da distribuição normal. Temos então duas regiões de rejeição de H_0, que correspondem a 2,5% em cada cauda da curva. Os valores na tabela t que delimitam as $R.R.H_0$ são: t = -2,26 e t = 2,26.



O valor estatística de teste é:

$$t = \frac{0{,}996 - 1{,}0}{0{,}0053 / \sqrt{10}} = -2{,}38$$

Agora observe que o valor da estatística de teste (t = -2,38) encontra-se na primeira região de rejeição. Logo, devemos rejeitar H_0 e concluir que o volume médio engarrafado é diferente de 1,0 litro, sendo necessária nova regulagem das máquinas.

7.4. *Exercícios*

1) Uma companhia de produtos PET está formulando um xampu novo para cães e está interessada na altura (em mm) da espuma. A altura da espuma tem distribuição normal com um desvio padrão de 20 mm. A companhia deseja que a verdadeira média seja de 175 mm, mas retirando-se uma amostra de tamanho $n = 9$, obteve-se uma média amostral de 185 mm. A empresa poderia comercializar o produto informando que a altura média é de 175 mm? Proceda ao teste de hipóteses considerando um nível de 5% de significância (probabilidade de erro).

2) Os registros dos últimos anos de um colégio atestam para os calouros admitidos a nota média de 115 (teste vocacional). A nota do teste vocacional é suposta ter distribuição normal com desvio padrão igual a 20. Para testar a hipótese de que a média de uma nova turma é a mesma encontrada nos registros, retirou-se ao acaso uma amostra de 20 notas, obtendo-se média de 118. Proceda ao teste de hipóteses considerando $\alpha = 0{,}01$.

3) Uma amostra de 25 elementos resultou numa média de 13,5. A distribuição é normal com desvio padrão de 4,4. Efetue o teste da hipótese $H_0\colon \mu = 16$ contra $H_1\colon \mu \neq 16$ considerando $\alpha = 0{,}05$ e depois $\alpha = 0{,}10$.

4) Retirada uma amostra de 15 parafusos, obteve-se as seguintes medidas para seus diâmetros:

10	10	10	11	11	12	12	12
12	13	13	14	14	14	15	

   Admitindo que o diâmetro tenha distribuição normal com variância 2,5, teste a hipótese $H_0\colon \mu = 12{,}5$ contra $H_1\colon \mu \neq 12{,}5$, com $\alpha = 0{,}05$.

5) As estaturas (em cm) de recém-nascidos foram tomadas no Departamento de Pediatria de determinada faculdade de medicina, cujos resultados são:

41	50	52	49	49	54	50	47	52	49
50	52	50	47	49	51	46	50	49	50

   a) Suponha que a população das estaturas é normal com variância 2 cm; teste (com $\alpha = 0{,}05$). a hipótese de que a média desta normal é 50 cm.
   b) Faça o mesmo teste para a média, mas agora **sem** admitir que a variância seja conhecida.

6) Quinze animais foram alimentados com uma certa dieta durante 3 semanas e verificou-se os seguintes aumentos de pesos (em kg):

25	30	32	24	40	34	37	33
34	28	30	32	38	29	31	

   Teste a hipótese de que a média é 30 kg, sendo $\alpha = 10\%$.