

Capítulo 1

Somatório e Produtório

Os métodos estatísticos frequentemente se utilizam das técnicas de somatório e produtório, denotados pelas letras gregas maiúsculas Σ (sigma) e Π (pi), respectivamente.

1.1 Indexadores

Variáveis índices ou indexadores são bastante úteis na definição de somatório e produtório, pois definem *quais* são os elementos da amostra ou conjunto de dados que serão efetivamente utilizado no cálculo da soma ou produto.

A representação x_i (leia-se X índice i) refere-se um dos n valores da amostra $X: x_1, x_2, \dots, x_n$. A letra i , usada como índice, pode representar qualquer um dos valores: $1, 2, 3, \dots, n$. Evidentemente pode ser usada qualquer outra letra além de i , sendo também comuns as letras j e k .

1.2 Somatório

Muitas vezes precisamos escrever expressões que envolvem somas com muitos termos, ou cujos termos obedecem a certa lei de formação. Por exemplo, a soma dos 100 primeiros números naturais: $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$. Simbolizaremos por x_i o i -ésimo termo da soma. Assim, x_1 representa o primeiro termo, x_2 representa o segundo, x_3 , o terceiro, x_{100} representa o centésimo termo. A representação dessa soma é

$$\sum_{i=1}^{100} x_i$$

1.2.1 Principais representações de somatório

- Soma simples

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

- Soma de quadrados

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

- Quadrado da soma

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

- Soma de produtos

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

- Produto das somas

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^m y_j \right) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_m)$$

Exemplos

Considere amostras de tamanho $n = 4$ das variáveis X e Y representando o número de bulbilhos por bulbo de alho:

$$X = \{15, 23, 22, 40\}$$

$$Y = \{24, 53, 30, 31\}$$

- $\sum_{i=1}^4 x_i = 15 + 23 + 22 + 40 = 100$
- $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 15^2 + 23^2 + 22^2 + 40^2 = 2838$
- $\left(\sum_{i=1}^4 x_i \right)^2 = (15 + 23 + 22 + 40)^2 = 10000$
- $\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 15 \times 24 + 23 \times 53 + 22 \times 30 + 40 \times 31 = 3479$
- $\left(\sum_{i=1}^4 x_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 y_i \right) = 13800$

1.2.2 Número de termos do somatório

O número de termos (NT) ou parcelas do somatório é dado pela seguinte expressão:

$$NT = LS - LI + 1$$

sendo LS e LI os limites superior e inferior do somatório.

Se o somatório está sujeito a r restrições, então tem-se que:

$$NT = LS - LI + 1 - r$$

Exemplos

- $\sum_{i=1}^6 x_i \Rightarrow NT = 6 - 1 + 1 = 6$
- $\sum_{j=3}^{150} x_j \Rightarrow NT = 150 - 3 + 1 = 148$
- $\sum_{k=2, k \neq 3, k \neq 4}^{80} y_k \Rightarrow NT = 80 - 2 + 1 - 2 = 77$

1.2.3 Propriedades de somatório

- Somatório de uma constante k

$$\sum_{i=1}^n k = k + k + \dots + k = nk$$

- Somatório do produto de uma constante por uma variável

$$\sum_{i=1}^n kx_i = kx_1 + kx_2 + \dots + kx_n = k \sum_{i=1}^n x_i$$

Note ainda que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i = m \sum_{i=1}^n x_i$$

pois x_i torna-se uma constante para o somatório em relação a j .

- Somatório de uma soma ou subtração de variáveis

$$\sum_{i=1}^n (x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^n x_i \pm \sum_{i=1}^n y_i$$

1.2.4 Somatório duplo

É muito comum quando trabalhamos com matrizes ou tabelas de dupla entrada necessitartermos calcular somatórios em relação as suas linhas e/ou colunas. Surgem então dois índices, um para linha e outro para coluna, com isso vem a noção de somatório duplo. A representação de somatório duplo é:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij}$$

O número de termos de um somatório duplo é dado pelo produto dos números de termos dos somatórios referentes a cada índice.

$$NT = (n - 1 + 1)(m - 1 + 1)$$

Exemplos

Considere a seguinte matriz 2×3 de dados:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Então calcule:

- $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} = 2 + 4 + 8 + 3 + 1 + 2 = 20$
- $\sum_{i=1}^2 a_{i2} = 4 + 1 = 5$
- $\sum_{j=2}^3 a_{1j} = 4 + 8 = 12$

1.3 Produtório

De forma análoga àquela vista em somatório, representaremos o produto de n termos, x_1, x_2, \dots, x_n , por:

$$\prod_{i=1}^n x_i$$

1.3.1 Principais representações de produtório

- Produto simples

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$$

- Produto de uma constante k

$$\prod_{i=1}^n k = k \times k \times \dots \times k = k^n$$

- Produto de uma constante por uma variável

$$\prod_{i=1}^n kx_i = kx_1 \times kx_2 \times \dots \times kx_n = k^n \prod_{i=1}^n x_i$$

- Produto de duas variáveis

$$\prod_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 \times x_2 y_2 \times \dots \times x_n y_n = \prod_{i=1}^n x_i \prod_{i=1}^n y_i$$

- Produto de uma variável índice

$$\prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n! \quad (\text{leia - se : } n \text{ fatorial})$$

- Logarítmo do produto

$$\log \prod_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \log x_i, \quad \forall x_i > 0$$

Exemplos

Considere amostras de tamanho $n = 3$ das variáveis X e Y :

$$X = \{1, 3, 4\}$$

$$Y = \{2, 5, 0\}$$

- $\prod_{i=1}^3 x_i = 1 \times 3 \times 4 = 12$
- $\prod_{i=1}^3 y_i = 2 \times 5 \times 0 = 0$
- $\prod_{i=1}^3 2x_i = 2^3 \prod_{i=1}^3 x_i = 8 \times 12 = 96$
- $\prod_{i=1}^3 x_i y_i = \prod_{i=1}^3 x_i \prod_{i=1}^3 y_i = 12 \times 0 = 0$

1.4 Exercícios

1) Considere as amostras:

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$$

$$Y = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

calcule os seguintes somatórios e produtórios:

$$\text{a. } \sum_{i=1}^8 \sum_{j=2}^5 (x_i - 3) \quad \text{b. } \sum_{i=1}^8 \left(\frac{x_i}{2} - y_i \right)^2 \quad \text{c. } \sqrt{\prod_{i=1}^4 x_i} \quad \text{d. } \prod_{j=2}^4 \frac{x_j y_j}{3}$$

2) Se $\sum_{i=1}^3 x_i = 12$, $\sum_{i=1}^3 x_i^2 = 56$, $y_1 = 3$, $y_2 = 5$ e $y_3 = 6$, calcule:

$$\text{a. } \sum_{i=1}^3 9 \quad \text{b. } \sum_{i=1}^3 12x_i \quad \text{c. } \sum_{i=1}^3 (x_i^2 - 2) \quad \text{d. } \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

3) Sabendo-se que $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$, $x_4 = 7$, $x_5 = 6$, $y_1 = 3$, $y_2 = 8$, $y_3 = 2$, $y_4 = 5$ e $y_5 = 6$, calcule:

$$\text{a. } \sum_{i=1, i \neq 2}^5 x_i \quad \text{b. } \sum_{i=1}^5 4x_i \quad \text{c. } \sum_{i=3}^5 (x_i + 6) \quad \text{d. } \sum_{i=2}^4 (2x_i - 3) \quad \text{e. } \sum_{i=1}^5 x_i y_i \quad \text{f. } \sum_{i=1}^5 (x_i + y_i)$$

4) A variância (S^2) de uma amostra com n observações de uma variável aleatória X pode ser calculada por meio de:

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (1.1)$$

sendo $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Pede-se:

a. Utilize propriedades de somatório na equação 1.1 para mostrar que:

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n} \right]$$

b. Seja $Y_i = kX_i$, em que k é uma constante qualquer. Utilize propriedades de somatório para mostrar que $S_Y^2 = k^2 S_X^2$.

5) Desenvolver:

$$\text{a. } \sum_{i=-1}^3 \left(i^2 + \frac{1}{j} \right) \quad \text{b. } \left[\sum_{i=1}^5 (i+8) \right]^2 \quad \text{c. } \prod_{i=1}^5 (i+8)$$

Respostas

- 1) a. 192 b. 140 c. 19,59 d. 746,66
 2) a. 27 b. 144 c. 50 d. não é possível
 3) a. 24 b. 112 c. 39 d. 29 e. 128 f. 52
 4) a. $\sum (X - \bar{X})^2 = \sum X^2 - 2\bar{X} \sum X + n\bar{X}^2 = \dots$
 b. $S_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum (Y - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n-1} \sum (kX - k\bar{X})^2 = \dots$
 5) a. $5 \left(3 + \frac{1}{j} \right)$ b. 3025 c. 154440