Introdução

Contrastes

Sobre o erro tipo I

Comparações planejadas

Comparações não planejadas

Escolhendo o teste

Determinando o número de repetições do experimento

Exercícios

Quiz

Procedimentos de Comparações Múltiplas de Médias

Prof. Anderson Rodrigo da Silva

Instituto Federal Goiano

Conteúdo

1. Introdução
2. Contrastes
3. Sobre o erro tipo I
4. Comparações planejadas
5. Comparações não planejadas
6. Escolhendo o teste
7. Determinando o número de repetições do experimento
8. Exercícios
9. Quiz
10. Referências

Testes para 1 média

Quando $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, e estamos interessados em testar as hipóteses

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

podemos lançar mão de:

1) Teste Z (normal padrão)

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \tag{1}$$

2) Teste t-Student

$$t = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \tag{2}$$

Testes para 2 médias

Quando $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, independentes, e estamos interessados em testar as hipóteses

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$$

podemos lançar mão de:

1) Teste t-Student (variâncias homogêneas)

$$t = \frac{\hat{\mu}_x - \hat{\mu}_y}{\hat{\sigma}_c \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \sim t(n_x + n_y - 2) \tag{3}$$

2) Teste t-Student (variâncias heterogêneas)

$$t = \frac{\hat{\mu}_x - \hat{\mu}_y}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{n_x} + \frac{\hat{\sigma}_y^2}{n_y}}} \sim t(n*) \tag{4}$$

Comparações múltiplas de médias: contexto

Quando o teste F da ANOVA está sendo utilizado para testar diferenças entre I tratamentos, a seguinte hipótese de nulidade é formulada:

$$H_0 : t_1 = t_2 = \ldots = t_I = 0$$

ou, alternativamente

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_I$$

Contexto

Entretanto, quando $I > 2$, algumas comparações específicas de tratamentos podem ser interesse. Nesse contexto, os procedimentos de comparações múltiplas (PCM) são apropriados, desde que tratamento seja um fator qualitativo, e servem como um complemento do teste F.

Contexto

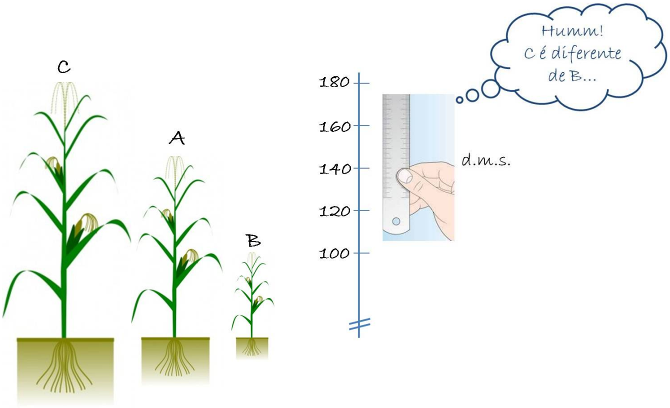

Figura: diferença mínima significativa

Fonte: Adaptado de Vieira & Hoffmann (1999)

Tipos de comparações

Comparações de médias ou testes para contrastes de médias podem ser de dois tipos:

- Planejadas ou pré-estabelecidas
- Não planejadas ou "post-hoc"

Contrastes de médias

Uma combinação linear de médias cujos coeficientes somam zero constitui um contraste de médias, denotado por

$$C = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_I\mu_I = \sum_{i=1}^{I} a_i\mu_i,$$

sendo que $\sum_{i=1}^{I} a_i = 0$.

Exemplo

Considere o exemplo de quatro cultivares de milho ensaiados em DIC, cujas médias de produtividade $(kg/100m^2)$ foram: $\hat{\mu}_1 = 23$, $\hat{\mu}_2 = 27$, $\hat{\mu}_3 = 26$ e $\hat{\mu}_4 = 31$. Dentre vários outros, os seguintes contrastes podem ser formados:

$$\begin{aligned} C_1 &= \mu_1 - \mu_2 \\ C_2 &= \mu_3 - \mu_1 \\ C_3 &= \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) - \mu_3 \end{aligned}$$

Verifique se estes são realmente contrastes de médias.

Exemplo

As estimativas desses contrastes são:

$$
\begin{aligned}
\hat{C}_1 &= \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = 23 - 27 = -4 \\
\hat{C}_2 &= \hat{\mu}_3 - \hat{\mu}_1 = 26 - 23 = 3 \\
\hat{C}_3 &= \tfrac{1}{2}(\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2) - \hat{\mu}_3 = \tfrac{1}{2}(23 + 27) - 26 = -1
\end{aligned}
$$

Variância de um contraste

A variância da estimativa de um contraste $(\hat{C})$ de médias é dada por:

$$Var(\hat{C}) = Var(a_1\hat{\mu}_1 + a_2\hat{\mu}_2 + \ldots + a_I\hat{\mu}_I) = \sum_{i=1}^{I} \frac{a_i^2}{r_i}\sigma_i$$

se

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_I^2 = \sigma^2$ (homocedasticidade)
- $r_1 = r_2 = \ldots = r_I = r$ (experimento balanceado)

então:

$$Var(\hat{C}) = \frac{\sigma^2}{r}\sum_{i=1}^{I} a_i^2$$

Obs.: em se tratando da ANOVA, em geral $\hat{\sigma}^2 = QMRes$.

Variância de um contraste

Calcule a estimativa da variância do contraste C_3 do exemplo considerando $r = 5$, $\hat{\sigma}^2 = QMRes = 7,00$.

Tipos de erro

Ao tomar uma decisão num teste de hipóteses estamos sujeitos a dois dois tipos de erro:

- Erro tipo I: ocorre quando se rejeita uma hipótese H_0 verdadeira. A probabilidade de cometer esse erro é denotada por α.
- Erro tipo II: ocorre quando se aceita uma H_0 que é falsa. A probabilidade de cometer esse erro é denotada por β.

Taxas de erro tipo I

Em se tratando de comparações múltiplas, isto é, vários testes sendo realizados com o mesmo conjunto de dados, dois tipos de taxa de erro tipo I são importantes:

- Taxa de erro da comparação (TEC): o α individual das comparações de médias.
- Taxa de erro da família (TEF): a probabilidade de erroneamente rejeitar ao menos uma H_0 quando duas ou mais comparações são feitas.

A relação entre TEC e TEF é expressa pelas equações:

$$\begin{aligned} TEF &= 1-(1-TEC)^N \\ TEC &= 1-(1-TEF)^{1/N} \end{aligned}$$

sendo N o número de comparações.

Obs.: para N não muito grande vale a aproximação: $TEF \approx N \times TEC$.

Comparações planejadas

São as comparações entre médias ou grupos de médias determinadas por ocasião do planejamento da estratégia de análise dos dados, isto é, os contrastes são definidos "a priori", não sugeridos pelos dados.

Exemplo 2 (Kronka & Banzatto, 2006): As médias de produção de frutos de abacaxi (t/ha) num estudo de espaçamento/consórcio foram:

1. Abacaxi (0,90 × 0,30 m) monocultivo: $\hat{\mu}_1 = 53,5$
2. Abacaxi (0,80 × 0,30 m) monocultivo: $\hat{\mu}_2 = 56,5$
3. Abacaxi (0,80 × 0,30 m) + amendoim: $\hat{\mu}_3 = 62,0$
4. Abacaxi (0,80 × 0,30 m) + feijão: $\hat{\mu}_4 = 60,4$

Dados: $QMRes = 23{,}4$ e $r = 4$ (blocos casualizados)

Comparações planejadas

É recomendável que os contrastes sejam mutuamente ortogonais, de modo que as comparações não tenham sobreposição de informações.
Há duas formas de realizar comparações planejadas:

- Particionando a soma de quadrados de tratamento
- Usando o teste t para duas amostras independentes

Teste t-Student

Os contrastes planejados podem também ser testados com teste t, pois

$$\frac{\hat{C}}{\sqrt{\hat{Var}(\hat{C})}} \sim t_{\nu}$$

em que ν é o número de graus de liberdade do resíduo.
O contraste C será considerado não nulo com $TEC = \alpha$ quando

$$\left|\hat{C}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2},\nu} \times \sqrt{\hat{Var}(\hat{C})}$$

Exercício de sala

Considere o QMRes (7,0) e as médias ($\hat{\mu}_1 = 23$, $\hat{\mu}_2 = 27$, $\hat{\mu}_3 = 26$) apresentados anteriormente. Teste, com $\alpha = 0.05$, a seguinte hipótese:

$$H_0 : C_3 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) - \mu_3 = 0 \quad vs. \quad H_1 : C_3 \neq 0$$

Interprete o resultado

Testes *post-hoc*

Referem-se às comparações de todos os pares de médias de um modo "post-hoc", isto é, após análise dos dados.
Os contrastes formados são geralmente não ortogonais, contudo é possível controlar a TEF.
Alguns dos principais testes post-hoc são...

Teste de Scheffé

- Pode ser utilizado para testar qualquer tipo de contraste de médias
- Tem a propriedade de manter a TEF, exigindo para isso que o teste F da ANOVA seja significativo.

A estatística teste é:

$$S = \sqrt{(I-1)\hat{Var}(\hat{C})F_{\alpha}(I-1,\nu)}$$

em que I é o número de tratamentos do experimento e ν é número de graus de liberdade do resíduo.
A hipótese $H_0 : C = 0$ é rejeitada ao nível α quando:

$$\left|\hat{C}\right| \geq S$$

Teste de LSD protegido de Fisher

- Baseia-se na *diferença mínima significatica* (*least square difference*).
- Apenas para testar contrastes envolvendo duas médias, do tipo: $C = \mu_i - \mu_j$.
- Deve ser aplicado quando o F da ANOVA é significativo (*método protegido*).
- A TEF não é controlada.

A estatística teste é:

$$LSD = t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{QMRes\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}\right)}$$

A hipótese $H_0 : \mu_i = \mu_j$ será rejeitada ao nível α quando

$$\left|\hat{C}\right| \geq LSD$$

Exercício em sala

Aplique o teste LSD às médias ($\hat{\mu}_1 = 23$, $\hat{\mu}_2 = 27$, $\hat{\mu}_3 = 26$, $\hat{\mu}_4 = 31$). Considere $TEC = 0.05$.

Teste HSD de Tukey

- HSD: honestly significant diference *(diferença honestamente significativa)*.
- Apropriado para testar contrastes entre duas médias.
- Baseia-se na amplitude total estudentizada (q), que é um valor de t ajustado para mais de duas amostras.
- A TEF é controlada.

A estatística teste é:

$$HSD = q_{\alpha,I,\nu}\sqrt{\frac{1}{2}\hat{Var}(\hat{C})}$$

sendo I o número de tratamentos.

Teste HSD de Tukey

Para um contraste do tipo $\hat{C} = \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j$, tem-se que:

$$HSD = q_{\alpha, I, \nu}\sqrt{\frac{QMRes}{r}}$$

Sendo $r_i \neq r_j$, o procedimento é aproximado e referido como *método Tukey-Kramer*, e a estatística HSD passa à:

$$HSD = q_{\alpha, I, \nu}\sqrt{\frac{QMRes}{2}\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}\right)}$$

Teste de Duncan

- Apropriado para comparações entre duas médias.
- Também é baseado na amplitude total estudentizada, com a diferença que o valor tabelado não é único em todas as comparações, mas leva em conta o número (h) de **médias ordenadas** abrangidas pelo contraste.
- A comparação das médias extremas é feita de forma mais sensível que com o Tukey.
- Não controla a TEF.
- A estatística é análoga àquela do Tukey, substituíndo o valor único $q_{\alpha,I,\nu}$ por $z_{\alpha,h,\nu}$, o valor tabelado por Duncan para comparar médias a uma distância h.

Teste de Dunnett

- Apropriado para comparações aos pares das médias de tratamentos com a média de um tratamento controle ou testemunha.

Se I tratamentos são ensaiados e μ_1 é a verdadeira média do controle, então as hipóteses do tipo

$$H_0 : \mu_1 - \mu_i, \qquad i = 2, 3, ..., I$$

serão rejeitadas quando

$$|\mu_1 - \mu_i| \geq d_{\alpha,I,\nu}\sqrt{\hat{Var}(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_i)}, \qquad i = 2, 3, ..., I.$$

sendo $d_{\alpha,I,\nu}$ o valor tabelado.

Exercício em sala

Considerando o cultivar 4 como testemunha, aplique o teste de Dunnett às médias do Exemplo 1 (milho).

Outros testes...

- Bonferroni
- SNK
- Scott-Knott

Exemplo 3: $r_i \neq r_j$

Considere dados do número de ovos por poedeira, 35 dias após o início de um experimento para estudar o efeito de quatro dietas (A, B, C e D), sendo o primeiro deles o tratamento controle ou testemunha:

	A	B	C	D
	25	24	25	20
	21	31	18	17
	29	32	19	23
			22	16
Média	25	29	21	19

Adaptado de Vieira (1989)

Dado: $QMRes. = 13,0$

Exercício em sala

Aplique o teste HSD de Tukey aos dados do Exemplo 3.

Números diferentes de repetições

Quando o número de repetições por tratamento não é o mesmo, isto é,

$$r_1 \neq r_2 \neq \ldots \neq r_I,$$

muitos softwares estatísticos utilizam uma média harmônica do número de repetições (r_H) no cálculo das estatísticas teste, tal que

$$r_H = \frac{I}{\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{r_i}}$$

Escolhendo o teste adequado

- Não há uma regra geral.
- No caso de comparações planejadas... teste t-Student.
- No caso de comparações não planejadas... considerar a escala crescente de rigor: LSD, Duncan, SNK, Tukey, Bonferroni, Scheffé.
- Precisão experimental (CV%)

Procedimentos de Comparações Múltiplas de Médias

Prof. Anderson Rodrigo da Silva

Introdução

Contrastes

Sobre o erro tipo I

Comparações planejadas

Comparações não planejadas

Escolhendo o teste

Determinando o número de repetições do experimento

Exercícios

Quiz

Determinando o número de repetições do experimento

Testes post-hoc podem ser utilizados para determinar o número necessário de repetições do experimento.
Exemplo: a estatística HSD de Tukey

$$HSD = q_{\alpha,I,\nu}\sqrt{\frac{QMRes}{r}}$$

pode ser utilizada para obter

$$r \approx \frac{q^2_{\alpha,I,\infty}QMRes}{(HSD)^2}$$

Exercício em sala

Ainda tendo como base o exemplo 1, considere que o seu *nível de tolerância* para diferenciar dois cultivares num experimento seja de 6 sacas (60 kg) por hectare. Neste caso, qual o número necessário de repetições.

Exercícios

1. Utilizando o resultado da ANOVA do exemplo de abacaxi, compare as médias duas-a-duas com os testes LSD e HSD (use $\alpha = TEC = 0,05$). Compare os resultados.
2. Utilizando dados do exemplo 3, verifique se há diferença ($\alpha = 0,05$) entre a média do tratamento controle e cada um dos demais.

Quiz

Teste o conhecimento adquirido nesta aula realizando o quiz online contendo 10 questões, disponível em: arsilva.weebly.com

Referências

1. BARBIN, D. **Planejamento e análise estatística de experimentos agronômicos**. Piracicaba: FEALQ, 2004.
2. CAMPOS, H. **Estatística aplicada à cana-de-açúcar**. Piracicaba: FEALQ, 1984. 292p.
3. CECON, P.R.; RÊGO, E.R.; SILVA, A.R.; RÊGO, M.M. **Estatística e Experimentação**. João Pessoa: São Mateus, 2013. 130p.
4. COCHRAN, W.G. E COX, G.M. **Experimental designs**. 2ª ed. Nova York, Wiley, 1957. 611p.
5. DAGNELIE, P. **Principles dexperimentation**. Les Presses Agronomiques de Gembloux. Bélgica, 1981.
6. KRONKA, S.N.; BANZATTO, D.A. **Experimentação Agrícola**. 4ª ed. Jaboticabal: FUNESP/UNESP, 2006.
7. MONTGOMERY, D.C. **Design and analysis of experiments**. 5ª ed. New York: John Wiley and Sons, 2001. 684p.
8. PIMENTEL-GOMES, F. **Curso de Estatística Experimental**. 15ª. ed. Piracicaba: FEALQ, 2009. 451p.
9. VIEIRA, S. & HOFFMANN, R. **Estatística Experimental**. 2ª. ed. São Paulo: Atlas, 1999. 185p.